Problemes

Com ja va resultant habitual, també hem rebut resposta a tots els problemes proposats al número anterior. No només això, sinó que el professor J. Monterde, de la Universitat de València, desenterra un vell enunciat, l'**A76**, del número 23, i ens en proporciona una solució analítica, que publiquem junt amb una altra més purament sintètica. El problema **A89** l'han resolt en Miquel Amengual Covas, de Cala Figuera, Mallorca, i Bruno Salgueiro Fanego, de Viveiro, Lugo, de qui és la solució que publiquem. De l'**A91** n'hem rebut solucions del mateix Miquel Amengual, que publiquem, d'en Joaquim Nadal i Vidal, de l'IES de Cassà de la Selva, i de Bruno Salgueiro Fanego. Del problema **A92**, en tenim les solucions d'en Joaquim Nadal i Vidal i la publicada, que és d'en Xavi Ros Otón, estudiant a la FME (UPC). En canvi, del problema **A90**, només n'hem rebut una solució, que, lamentablement, és incorrecta. El mateix Bruno Salgueiro ens proporciona informació complementària quant als problemes **A89** i **A91**, que també publiquem.

Cal, com sempre, agrair als remitents el seu valuós treball i, també, a José Luis Díaz-Barrero, de la UPC, Barcelona, a Enric Ventura, de la UPC, Manresa, a Xavi Ros Otón i a Miquel Amengual Covas per haver proposat, respectivament, els problemes **A93**, **A94**, **A95** i **A96**, i seguir així donant vida a aquesta secció. A tothom: moltíssimes gràcies!

I ara, l'admonició final: quan treballeu amb TEX o LaTEX, ens faciliteu moltíssim la feina d'elaborar la secció, tot i que aportacions en qualsevol altre format, també manuscrits, són igualment ben rebudes. Les adreces de correu per enviar-nos-les són cromero@xtec.cat o bé carles.romero.c@gmail.com. Fins a la propera!

Problemes proposats

A93. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona.) Siguin a, b i c nombres reals tals que $0 < a, b, c \leq 1$. Proveu que

$$\frac{1}{\sqrt{1+2a}} + \frac{1}{\sqrt{1+2b}} + \frac{1}{\sqrt{1+2c}} \leq \frac{3}{\sqrt{1+2\sqrt[3]{abc}}}$$

A94. (Proposat per Enric Ventura, UPC, Manresa.) Sis pirates es troben un tresor de 100 monedes d'or. Després de discutir una estona sobre com repartir-se'l es posen d'acord a seguir l'algorisme següent:

1) s'ordenen de jove a vell,

2) el més jove fa una proposta de repartiment (per exemple, «totes per a mi»),

3) la proposta la voten entre tots (inclòs el mateix proponent), amb les opcions de vots «a favor», «en contra» i «vot en blanc», i

4) si el resultat és favorable, apliquen la proposta de repartiment en qüestió i se'n van cap a casa contents; en cas desfavorable o d'empat, maten el més jove (recordeu que són pirates!) i tornen al pas 2 de l'algorisme.

Tu ets el pirata més jove dels sis, quina proposta inicial faries per tal de sortir-ne viu, i marxar cap a casa amb la màxima quantitat possible de monedes d'or? (per resoldre el problema, hem de suposar que, a més de pirates, són matemàtics, que saben raonar, i que tots voten exclusivament en funció del màxim benefici propi).

A95. (Proposat per Xavi Ros Otón, estudiant, FME, UPC.) Tenim quatre cercles en el pla, cadascun tangent als altres tres i de forma que els tres cercles petits estan continguts en el més gran. Proveu que el radi del cercle gran és la suma dels altres tres si i només si els centres dels tres cercles petits formen un triangle rectangle.

A96. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.) Siguin D, E, F els peus de les bisectrius interiors d'un triangle ABC. Si denotem per $[XYZ]$ l'àrea del triangle XYZ i representam per R i r els respectius radis de les circumferències circumscrita i inscrita a $\triangle ABC$, demostrau que

$$\frac{r}{2R} \leq \frac{[DEF]}{[ABC]} \leq \frac{1}{4}$$

i deduïu-ne la *desigualtat d'Euler*, $R \geq 2r$.

Solucions

A76. (Proposat per la redacció.) Dues circumferències C_1 i C_2, la primera de radi més gran que la segona, es tallen en els punts A i B. La recta r_1, una de les dues tangents comunes a ambdues circunferències, té els respectius punts de tangència a P i Q, mentre que l'altra tangent comuna, r_2, els té a R i S. Heu de demostrar que els ortocentres dels triangles $\triangle APQ$, $\triangle BPQ$, $\triangle ARS$ i $\triangle BRS$ són els vèrtexs d'un rectangle i heu de determinar la posició relativa dels punts A i B respecte d'aquest rectangle.

Solució 1: (Solució de J. Monterde, Universitat de València.) Gràcies a translacions, homotècies i rotacions adequades, podem suposar que el centre d'una de les circumferències, C_1, és l'origen de coordenades, que el seu radi és 1 i que el centre de l'altra circumferència, C_2, està sobre el semieix positiu d'abscisses, en un cert punt $(a, 0)$.

Càlculs senzills però laboriosos mostren que els punts A i B d'intersecció entre la circumferència C_1 i la circumferència C_2, centrada en $(a, 0)$, $a > 0$ i radi r, amb $r \geq a-1$, i els punts P, Q, R i S de contacte amb les tangents comunes exteriors, tenen per coordenades

$$A = \left(\frac{1+a^2-r^2}{2a}, +\sqrt{1-\frac{(1+a^2-r^2)^2}{4a^2}}\right),$$

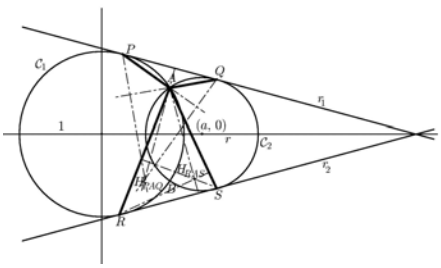
$$B = \left(\frac{1+a^2-r^2}{2a}, -\sqrt{1-\frac{(1+a^2-r^2)^2}{4a^2}}\right),$$

$$P = \left(\frac{1-r}{a}, \frac{1}{a}\sqrt{a^2-(r-1)^2}\right),$$

$$R = \left(\frac{1-r}{a}, -\frac{1}{a}\sqrt{a^2-(r-1)^2}\right),$$

$$Q = \left(\frac{a^2+r-r^2}{a}, \frac{r}{a}\sqrt{a^2-(r-1)^2}\right),$$

$$S = \left(\frac{a^2+r-r^2}{a}, -\frac{r}{a}\sqrt{a^2-(r-1)^2}\right).$$



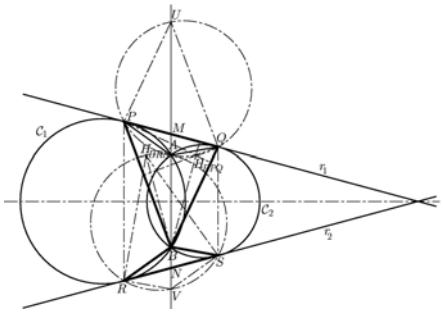
L'ortocentre, H_{PAQ}, del triangle PAQ i l'ortocentre, H_{RAS}, del triangle RAS tenen per coordenades

$$H_{PAQ} = B+ \left(\frac{(r-1)\sqrt{2a^2(1+r^2)-a^2-(r-1)^2}}{a\sqrt{a^2-(r-1)^2}}, 0\right)$$

$$H_{RAS} = B- \left(\frac{(r-1)\sqrt{2a^2(1+r^2)-a^2-(r-1)^2}}{a\sqrt{a^2-(r-1)^2}}, 0\right).$$

Per tant, els tres punts H_{PAQ}, B i H_{RAS} són col·linals i B és el punt mitjà entre H_{PAQ} i H_{RAS}. Per simetria respecte de l'eix d'abscisses, els punts H_{PAQ} i H_{RAS} juntament amb els ortocentres dels triangles PBQ i RBS formen un rectangle, els costats del qual són paral·lels als eixos coordenats.

Solució 2: (Redacció)



i) És obvi que la bisectriu de l'angle que formen les rectes r_1 i r_2 és un eix de simetria de la figura. Per tant, els segments PR, AB i QS són paral·lels i

$$\widehat{RPB} = \widehat{ABP} \quad \text{i} \quad \widehat{BQS} = \widehat{QBA}$$

perquè són parelles d'angles alterns interns. Però

$$\widehat{RPB} = \widehat{SRB} \quad \text{i} \quad \widehat{BQS} = \widehat{BSR}$$

perquè són, respectivament, parelles d'angles inscrits i semiinscrits que abasten els mateixos arcs. Resulta:

$$\alpha = \widehat{QAP} = \widehat{RBS} = 180^\circ - \left(\widehat{SRB} + \widehat{BSR}\right) =$$
$$= 180^\circ - \left(\widehat{RPB} + \widehat{BQS}\right) =$$
$$= 180^\circ - \left(\widehat{ABP} + \widehat{QBA}\right) =$$
$$= 180^\circ - \widehat{QBP} = 180^\circ - \beta.$$

ii) El punt M, intersecció de la recta AB amb la recta r_1, com que pertany a l'eix radical de les circumferències C_1 i C_2 (la mateixa recta AB), compleix que $MP^2 = MQ^2$, és a dir, $MP = MQ$ i M és el punt mitjà del segment PQ. Aleshores, podem completar el paral·lelogram $BPUQ$ en el qual els segments PQ i BU, que conté AB, en són les diagonals. Si H_{BPQ} és l'ortocentre del triangle $\triangle BPQ$, els segments PH i BQ són perpendiculars i, per tant, també ho són PH i PU. Resulta:

$$\widehat{HPU} = 90^\circ$$

i, igualment,

$$\widehat{UQH} = 90^\circ$$

i el quadrilàter $PH_{BPQ}QU$ és inscriptible.

iii) Ja que

$$\widehat{QAP} + \widehat{PUQ} = \widehat{QAP} + \widehat{QBP} = 180^\circ$$

el quadrilàter $PAQU$ també és inscriptible i, com que comparteix tres vèrtexs amb el quadrilàter inscriptible $PH_{BPQ}QU$, resulta que els punts U, P, A, H_{PBQ} i Q són concíclics. Aleshores,

$$\widehat{H_{BPQ}AU} = \widehat{H_{BPQ}PU} = 90^\circ$$

i el segment AH_{BPQ} és perpendicular al segment AB. Així, doncs, el punt A i l'ortocentre H_{BPQ} del triangle BPQ són ambdós sobre una recta paral·lela a la bisectriu de l'angle $\widehat{t_1t_2}$, eix de simetria de la figura.

iv) Però, raonaments del tot semblants sobre l'ortocentre H_{BRS} del triangle $\triangle BRS$, el punt N, el paral·lelogram $BRVS$ i els quadrilàters inscriptibles $RH_{BRS}SV$ i $RASV$ ens fan veure que

$$\widehat{H_{BRS}AV} = \widehat{H_{BRS}SV} = 90^\circ$$

i el segment AH_{BRS} també és perpendicular al segment AB i, per tant, els dos ortocentres H_{BPQ} i H_{BRS} són sobre una recta paral·lela a la bisectriu de l'angle $\widehat{t_1t_2}$, eix de simetria de la figura, la qual també conté el punt A.

v) Ara, de la perpendicularitat de l'altura BH_{BPQ} amb t_1, de la de l'altura BH_{BRS} amb t_2 i de la de AB amb la bisectriu de l'angle $\widehat{t_1t_2}$ es dedueix:

$$\widehat{t_1t_2} = \widehat{H_{BPQ}BA} = \widehat{ABH_{BRS}}$$

i, en conseqüència, el triangle $\triangle H_{BPQ}BH_{BRS}$ és isòsceles i $AH_{BPQ} = AH_{BRS}$. Obtenim que el segment $H_{BPQ} = H_{BRS}$ és paral·lel a la bisectriu de l'angle $\widehat{t_1t_2}$ i A n'és el punt mitjà.

vi) Finalment, de la simetria de la construcció respecte a la bisectriu de l'angle $\widehat{t_1t_2}$, el segment $H_{APQ} = H_{ARS}$, d'extrems els respectius ortocentres dels triangles $\triangle APQ$ i $\triangle ARS$, és paral·lel a la bisectriu de l'angle $\widehat{t_1t_2}$ i B n'és el punt mitjà. Tot això prova que el quadrilàter $H_{APQ}H_{ARS}H_{BPQ}H_{BRS}$ és un rectangle i que el segment AB uneix els punts mitjans de dos dels seus costats.

A89. (Proposat per la Redacció.) En un triangle $\triangle ABC$, les bisectrius interiors dels angles A, B i C tallen els costats BC, AC i AB en els punts D, E i F respectivament. Siguin p i q els perímetres respectius dels triangles $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$. Demostreu que $p \geq 2q$. En quines condicions hi ha igualtat?

Solució: (Solució i nota de Bruno Salgueiro, Viveiro, Lugo.) Segons el *teorema de la bisectriu interior* aplicat a la bisectriu AD del triangle ABC,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Resulta

$$BD = \frac{AB}{AC}\,DC = \frac{c}{b}\,DC$$

i, aleshores,

$$a = BD + DC = \frac{c}{b}\,DC + DC = \left(\frac{c}{b} + 1\right)\,DC$$

tot obtenint

$$DC = \frac{ab}{b+c}$$

i, de la mateixa manera,

$$EC = \frac{ab}{a+c}.$$

Aquestes igualtats, junt amb el *teorema dels cosinus* al triangle ABC,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

i al triangle DCE i la desigualtat òbvia

$(a-b)^2 \geq 0$ permeten escriure:

$$DE^2 = DC^2 + EC^2 - 2DC\,EC\cos C =$$
$$= \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{ab}{a+c}\right)^2 -$$
$$- 2\frac{ab}{b+c}\cdot\frac{ab}{a+c}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} =$$
$$= \frac{a^2b^2\left((a+c)^2+(b+c)^2\right)}{(b+c)^2(a+c)^2} -$$
$$- \frac{ab\left(a^2+b^2-c^2\right)}{(b+c)(a+c)} =$$
$$= \frac{ab}{(b+c)^2(a+c)^2}$$
$$\left(ab\left((a+c)^2+(b+c)^2\right) -\right.$$
$$\left. - \left(a^2+b^2-c^2\right)(b+c)(a+c)\right) =$$
$$= \frac{ab}{(b+c)^2(a+c)^2}$$
$$\left(ab\left(a^2+b^2+2c(a+b+c)\right) -\right.$$
$$\left. - \left(a^2+b^2-c^2\right)(ab+c(a+b+c))\right) =$$
$$= \frac{ab}{(b+c)^2(a+c)^2}$$
$$\left(ab\left(a^2+b^2\right) + 2abc(a+b+c) -\right.$$
$$-ab\left(a^2+b^2-c^2\right) -$$
$$\left. -c\left(a^2+b^2-c^2\right)(a+b+c)\right) =$$
$$= \frac{ab}{(b+c)^2(a+c)^2}$$
$$\left(\left(2abc - c\left(a^2+b^2-c^2\right)\right)\right.$$
$$(a+b+c) + ab\left(\left(a^2+b^2\right) -\right.$$
$$\left.\left. - \left(a^2+b^2-c^2\right)\right)\right) =$$
$$= \frac{ab}{(b+c)^2(a+c)^2}$$
$$\left(\left(2ab - \left(a^2+b^2-c^2\right)\right)(a+b+c)c + abc^2\right) =$$
$$= \frac{ab}{(b+c)^2(a+c)^2}$$
$$\left(\left(c^2-(a-b)^2\right)(a+b+c)c + abc^2\right) \leq$$
$$\leq \frac{ab}{(b+c)^2(a+c)^2}\left(c^2(a+b+c)c + abc^2\right) =$$
$$= \frac{abc^2}{(b+c)^2(a+c)^2}\left(ac+bc+c^2+ab\right) =$$
$$= \frac{abc^2}{(b+c)(a+c)}\,\frac{ac+bc+c^2+ab}{(b+c)(a+c)} =$$
$$= \frac{abc^2}{(b+c)(a+c)}.$$

Aleshores, tot tenint en compte $2\sqrt{xy} \leq x+y$, resulta

$$DE \leq \sqrt{\frac{abc^2}{(b+c)(a+c)}} \leq \sqrt{\frac{abc^2}{2\sqrt{bc}\,2\sqrt{ac}}} = \tag{1}$$
$$\frac{\sqrt{c\sqrt{ab}}}{2} \leq \frac{c+\sqrt{ab}}{4} \leq \frac{c}{4} + \frac{a+b}{8} = \frac{a+b+2c}{8}$$

amb igualtat si, i només si, simultàniament, $a=b$, $b=c$, $a=c$, $c=\sqrt{ab}$ i $a=b$, és a dir, si $a=b=c$, o sigui, si el triangle és equilàter.

De la mateixa manera,

$$FE \leq \frac{2a+b+c}{8} \quad \text{i} \quad FD \leq \frac{a+2b+c}{8} \tag{2}$$

i, finalment,

$$q = DE + FE + FD \leq \frac{a+b+2c}{8} +$$
$$+ \frac{2a+b+c}{8} + \frac{a+2b+c}{8} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{p}{2},$$

o sigui, $p \geq 2q$, com volíem. Com que les desigualtats (1) i (2) són igualtats si, i només si, el triangle és equilàter, la igualtat $p=2q$ és certa si, i només si, el triangle és equilàter.

Nota: La desigualtat d'aquest problema fou proposada per Toshio Seimiya, Kawasaki, Japó, a la revista *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem* com a problema 2.502, al volum 26, número 1, de l'any 2000, i apareix resolt per Michel Bataille, Rouen, França, en el volum 27, número 1, any 2001, pàgines 53 i 54 d'aquesta mateixa revista, en les quals, a més, es cita, sense provar-les, dues possibles generalitzacions.

A91. (Proposat per Xavi Ros Otón, estudiant, FME, UPC.) Sigui $\triangle ABC$ un triangle amb costats a, b i c, i siguin p, S el semiperímetre i l'àrea del triangle i R el radi de la circumferència circumscrita a aquest triangle.

a) Demostreu que $a+b+c \leq 3\sqrt{3}R$.

b) A partir de la desigualtat anterior, demostreu que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{p}{S}.$$

Nota: L'apartat *b*) és un refinament del problema 2 proposat a la fase catalana de la XLIII Olimpíada Matemàtica.

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.) *a*) Segons el *teorema del sinus*,

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \\ = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C},$$

d'on

$$a+b+c = 2R\left(\sin A + \ sinB + \sin C\right). \quad (1)$$

D'altra banda, en aplicar la *desigualtat de Jensen* a la funció $f(x) = \sin x$, que és convexa a l'interval $(0, \pi)$, obtenim

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{A+B+C}{3} = \\ = 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

i de (1) i (2) surt immediatament que

$$a+b+c \leq 3\sqrt{3}R$$

com es volia. Les condicions de la *desigualtat de Jensen* impliquen que la igualtat es produeix només si $A = B = C$, és a dir, si el triangle és equilàter.

b) Partim del resultat de l'apartat anterior i fem servir la desigualtat $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, que és equivalent a la desigualtat òbvia

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \quad (3)$$

així com la relació $abc = 4Rrp$, on r és el radi de la circumferència inscrita al triangle, que resulta de

$$pr = S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab\frac{c}{2R}$$

per obtenir

$$3\sqrt{3}R \geq a+b+c \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c} = \\ = \frac{3(ab+bc+ca)}{2p} = \frac{3(ab+bc+ca)}{\frac{abc}{2Rr}} = \\ = 6Rr\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

això és,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r},$$

que escrivim en la forma

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}p}{2S}$$

ja que el radi de la circumferència inscrita és el resultat de dividir l'àrea entre el semiperímetre. Com abans, i per raó de les condiciones de la *desigualtat de Jensen* i de la desigualtat (3), es té la igualtat si, i només si, el triangle és equilàter.

Notes: (Bruno Salgueiro, Viveiro, Lugo.)

La desigualtat de *a*), que es coneix com a *desigualtat de Mitrinovic*, ja surt demostrada, per exemple, a l'article 5.3 del clàssic llibre *Geometric inequalities*, Bottema *et al.*, Groningen, 1968.

A l'article «The best constant for a geometric inequality» de la revista *Journal of inequalities in pure and applied mathematics*, vol. 6, núm. 4, art. 111, 2005, hom hi enuncia i demostra desigualtats més fortes que la de l'apartat *b*), per exemple, aquesta:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{5}{4R} + \frac{7}{8r}\right)$$

i, a partir de la *desigualtat d'Euler*, $R \geq 2r$, es dedueix que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{5}{4R} + \frac{7}{8r}\right) \leq \\ \leq \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{5}{8r} + \frac{7}{8r}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{p}{S}.$$

Una altra manera de provar la desigualtat *b*) és a les pàgines 55 i 56 del número 9 de la revista *Eureka!*, que és la revista de l'Olimpíada Brasilenya de Matemàtiques.

A92. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC, Barcelona.) Trobeu totes les ternes (x, y, z) de nombres reals positius que són solució del sistema d'equacions

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ \dfrac{xy}{xy+z} + \dfrac{yz}{yz+x} + \dfrac{zx}{zx+y} & = & \dfrac{3}{4} \end{array}\right\}.$$

Solució: (Solució de Xavi Ros Otón, estudiant, FME, UPC.) Observem que, com que $x+y+z = 1$,

$$\frac{xy}{xy+z} = \frac{xy}{xy+z(x+y+z)} = \frac{xy}{(z+x)(z+y)},$$

d'on

$$\frac{xy}{xy+z}+\frac{yz}{yz+x}+\frac{zx}{zx+y}=$$
$$=\frac{x^2y+x^2z+y^2z+y^2x+z^2x+z^2y}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Ara bé,

$$(x+y)(y+z)(z+x)=$$
$$=x^2y+x^2z+y^2z+y^2x+z^2x+z^2y+2xyz$$

i, per tant,

$$\frac{xy}{xy+z}+\frac{yz}{yz+x}+\frac{zx}{zx+y}=$$
$$=1-\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Però

$$x+y\geq 2\sqrt{xy}\,,\quad y+z\geq 2\sqrt{yz}\,,\quad z+x\geq 2\sqrt{zx}$$

amb igualtat només en els casos respectius $x=y$, $y=z$ i $z=x$ i, així,

$$\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\leq\frac{2xyz}{8\sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{zx}}=\frac{1}{4}$$

de manera que

$$\frac{xy}{xy+z}+\frac{yz}{yz+x}+\frac{zx}{zx+y}=$$
$$=1-\frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

amb igualtat si, i només si, $x=y=z$.

Per tant, l'única terna de nombres reals positius que és solució del sistema és

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga

Tesis

- Javier Barajas Tomás va llegir la seva tesi, dirigida per Oriol Serra Albó, titulada *Coloring problems in Cayley graphs*, el dia 22 de juny de 2007. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada IV de la Universitat Politècnica de Catalunya.

El problema de trobar el nombre cromàtic d'un graf, el cardinal mínim d'una partició en conjunts independents, és tan antic com la mateixa teoria de grafs, i el seu estudi ha donat lloc a una bona part dels conceptes de la teoria tal com es coneix actualment. Els problemes relacionats amb la coloració de grafs continuen sent una àrea prolífica i fecunda. Un bon exemple és el llibre de Jensen i Toft *Graph Coloring Problems*, on aquests autors descriuen l'estat de la qüestió de més de dos-cents problemes oberts en aquest camp, i on destaquen en particular el problema de trobar el nombre cromàtic dels anomenats grafs distància, que constitueix una de les principals motivacions de la recerca desenvolupada en aquesta tesi.

Els grafs distància i els grafs circulants són grafs de Cayley (grafs amb un grup d'automorfismes transitiu i regular) de grups cíclics. La determinació del seu número cromàtic, en els casos que és viable, ha estat objecte d'atenció considerable a la literatura, i és el tema central d'aquesta tesi. Un dels mètodes que s'utilitzen amb més freqüència per acolorir grafs circulants vincula aquest problema amb l'anomenat «problema del corredor solitari», un altre dels temes centrals d'aquest treball. Una de les contribucions principals d'aquesta tesi és la introducció d'una eina algebraica, que anomenem el Lemma de filtre per primers (Prime Filtering Lemma), i que fa servir una successió d'ideals encaixats per a distribuir elements a l'anell de congruències mòdul n, fent servir multiplicadors adequats. Aquesta eina s'utilitza de manera sistemàtica per tractar diversos problemes de coloració en grafs distància i grafs circulants. En primer lloc es resol el primer cas obert, per a grau vuit, d'una conjectura de Zhu que afirma que el nombre